

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) Estudiar el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m+1 \end{cases}$, según los valores de m y resolverlo

para $m = -1$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 1 - (m+1) = m^2 + 1 - m - 1 = m(m-1) = 0 \Rightarrow \underline{m_1 = 0} \ ; \ ; \ \underline{m_2 = 1}$$

Para $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$

Veamos el rango de M' para los valores hallados anteriormente:

$$\text{Para } m = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = C_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

Para $m = 0 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

$$\text{Para } m=1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango de } M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

Para $m=1 \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$

Resolvemos para $m = -1$ (C. D.). Es sistema resulta $\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$.

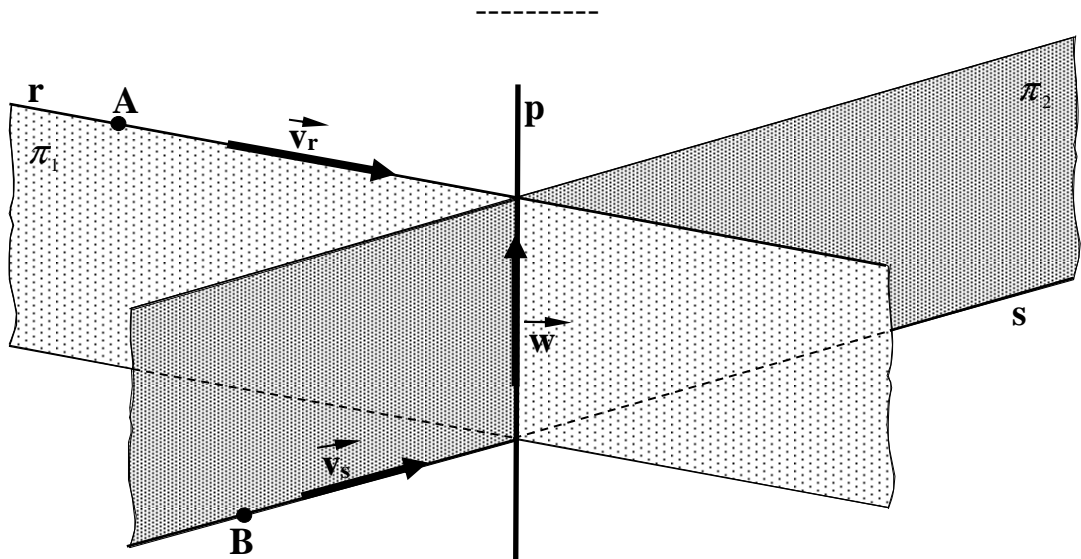
De la primera ecuación: $x = 1 - y$. Sustituyendo en las otras ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} -y + z = 0 \\ 1 - y - z = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -y + z = 0 \\ -y - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2y = -1 \;; \; \underline{y = \frac{1}{2}} \;; \; -y + z = 0 \;; \; \underline{y = z = \frac{1}{2}} \;;$$

$$x = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} = x$$

$$\underline{\underline{\text{Solución : } x = y = z = \frac{1}{2}}}$$

2º) Encontrar la ecuación de la recta p que corta perpendicularmente a las rectas r y s cuyas ecuaciones son $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv x = y + 1 = 2z - 2$.



La situación del problema se refleja en el gráfico anterior.

El procedimiento para hallar la ecuación de la recta p es el siguiente:

1.- Determinamos los puntos $A \in r$ y $B \in s$: $A(0, 0, 0)$ y $B(0, -1, 1)$.

2.- Hallamos unos vectores directores de las rectas: $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$ y $\vec{v}_s = (2, 2, 1)$.

3.- Obtenemos un vector \vec{w} , perpendicular a \vec{v}_r y \vec{v}_s :

$$\vec{w} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j + 2k - 2k - 2i - j \Rightarrow \underline{\vec{w} = (-1, 1, 0)}$$

4.- Determinamos los planos π_1 y π_2 , de la forma siguiente:

$$\pi_1(A; \vec{v}_r, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -y + z + z - x \quad ; ; \quad \underline{\pi_1 \equiv x + y - 2z = 0}$$

$$\pi_2(B; \vec{v}_s, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad 2(z-1) - (y+1) + 2(z-1) - x = 0 \quad ; ;$$

$$2z - 2 - y - 1 + 2z - 2 - x = 0 \quad ; ; \quad -x - y + 4z - 5 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\pi_2 \equiv x + y - 4z + 5 = 0}$$

La recta pedida p, es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección:

$$p \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

3º) Se considera la función $f(x) = \frac{Lx}{x^n}$, donde n es un número natural. Se pide:

a) Hallar los extremos relativos de la función f(x).

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Hacer una gráfica de la función en el caso de n = 2.

a)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^n - Lx \cdot n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1}(1-nLx)}{x^{2n}} = \frac{1-nLx}{x^{2n-n+1}} = \frac{1-nLx}{x^{n+1}} = f'(x)$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{n}{x} \cdot x^{n+1} - (1-nLx) \cdot (n+1) \cdot x^n}{x^{2n+2}} = \frac{x^n [-n - (1-nLx)(n+1)]}{x^{2n+2}} =$$

$$= \frac{-n - (n+1 - n^2 Lx - nLx)}{x^{2n+2}} = \frac{-n - n - 1 + n^2 Lx + nLx}{x^{2n+2}} = \frac{nLx \cdot (n+1) - 1}{x^{2n+2}} = f''(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-nLx}{x^{n+1}} = 0 \quad ; ; \quad 1-nLx = 0 \quad ; ; \quad 1 = nLx \quad ; ; \quad Lx = \frac{1}{n} \quad ; ; \quad x = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$$

$$f''(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}) = \frac{n \cdot \frac{1}{n} \cdot (n+1) - 1}{\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^{2n+2}} = \frac{1 \cdot (n+1) - 1}{e^{\frac{2n+2}{n}}} = \frac{n}{e^{\frac{2+2}{n}}} = \frac{n}{e^2 \sqrt[n]{e^2}} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo para } x = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}}}$$

$$f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^n}}{\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{1}{ne} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo} \Rightarrow P\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}, \frac{1}{ne}\right)}}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Lx}{x^n} = \frac{-\infty}{0^n} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{n \cdot x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n \cdot x^n} =$$

$$= \frac{1}{n \cdot 0^n} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lx}{x^n} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n \cdot x^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \cdot x^n} = \frac{1}{n \cdot \infty^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

c)

Para $n = 2$ la función es $f(x) = \frac{Lx}{x^2}$.

El punto mínimo es $P\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e}\right)$ y el eje de ordenadas es una asíntota de la función en su parte positiva.

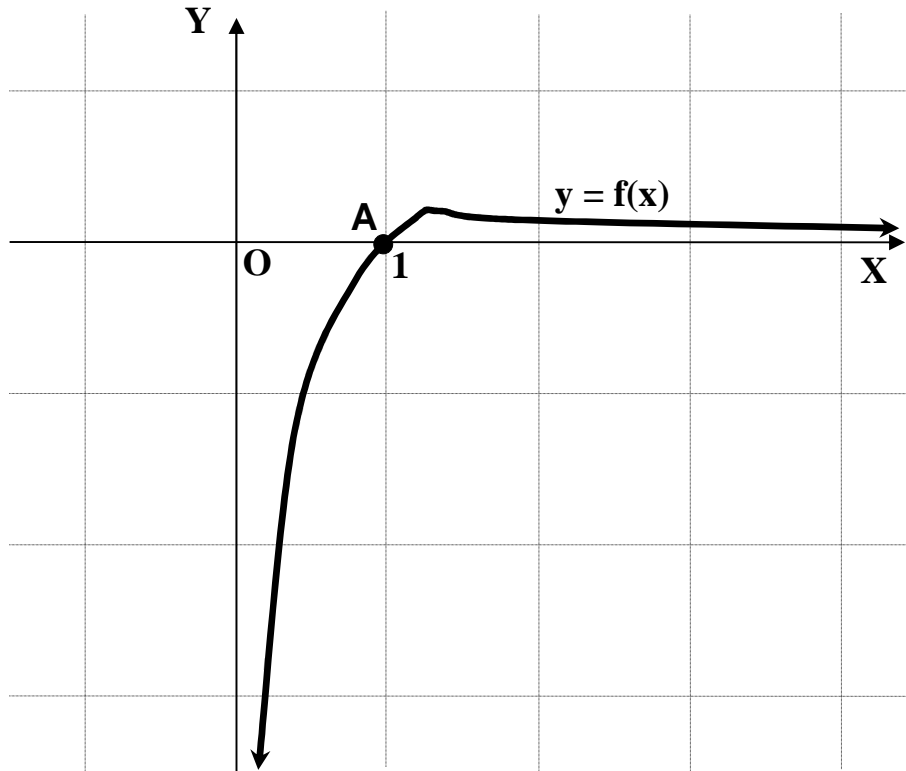
El dominio de la función es $D(f) \Rightarrow (0, +\infty)$.

Para $x = 1$ se anula la función, lo cual indica que pasa por $A(1, 0)$.

Para $x = 2$ el valor de la segunda derivada es $f''(x) = \frac{6Lx-1}{x^6}$ que se anula para $6Lx-1=0$;; $Lx = \frac{1}{6}$;; $x = \sqrt[6]{e} \cong 1'18$.

$$f(\sqrt[6]{e}) = \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt[6]{e^2}} = \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{e}} = \frac{\sqrt[3]{e^2}}{6e} \cong 0'12 \Rightarrow P. I. \Rightarrow Q\left(\sqrt[6]{e}, \frac{\sqrt[3]{e^2}}{6e}\right) \cong (1'18, 0'12)$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



4º) Enunciar el Teorema de Rolle. Demostrar que la función $f(x) = x^3 - x + a$ cumple las hipótesis del teorema en el intervalo $[0, 1]$ cualquiera que sea el valor de a . Determinar el punto en el cual se cumple la tesis.

El teorema de Rolle se puede enunciar diciendo:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) y si se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$.

La función $f(x) = x^3 - x + a$ es continua y derivable en todo su dominio, que es \mathbb{R} , independientemente del valor de a , por lo tanto, es aplicable el Teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$.

Aplicando el Teorema:

$$f(x) = x^3 - x + a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(0) = a \\ f(1) = 1^3 - 1 + a = a \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{f(0) = f(1), \forall a \in \mathbb{R}, c.q.d.}}$$

Vamos a determinar el punto que satisface el teorema.

$$f(x) = x^3 - x + a \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \;; \; x^2 = \frac{1}{3} \;; \; \underline{\underline{x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}}} \;; \; \underline{\underline{x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

Como el valor de x_2 no pertenece al intervalo dado, la solución es:

$$\underline{\underline{c = \frac{\sqrt{3}}{3}}} \quad (0 < c < 1)$$

OPCIÓN B

1º) Una matriz cuadrada se llama ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta. Se pide:

a) Demostrar que una matriz de la forma $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in R$, es ortogonal.

b) Calcular x e y de manera que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ sea ortogonal.

a)

La matriz inversa de M es la siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \quad ; ; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Por ser $|M| = 1$, la matriz adjunta de M^{-1} coincide con su inversa, por lo cual:

$$\underline{\underline{M^{-1} = \operatorname{Adj.}(M^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = M^{-1}, \text{ c.q.d.}}}$$

b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \quad ; ; \quad |A| = y \quad ; ; \quad \operatorname{Adj}(A^{-1}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Adj}(A^{-1}) = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; ; \quad \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{x}{y} \\ 0 & 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}}}$$

$$A^{-1} = \operatorname{Adj}(A^{-1}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{x}{y} \\ 0 & 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{x=0}} \quad ; ; \quad \underline{\underline{y=1}}$$

2º) Estudiar, según los valores de k , la posición relativa de los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv (k-2)x + y + (2k+1)z = 1$ y $\pi_2 \equiv 2x + (k-1)y - z = 0$. Encontrar la ecuación continua de la recta r , intersección de los planos π_1 y π_2 en el caso de $k = -1$.

Los vectores normales de los planos son los siguientes:

$$\vec{n}_1 = (k-2, 1, 2k+1) \text{ y } \vec{n}_2 = (2, k-1, -1)$$

Para que los planos sean paralelos tienen que ser paralelos los vectores normales:

$$\frac{k-2}{2} = \frac{1}{k-1} = \frac{2k+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k-2}{2} = \frac{1}{k-1} \quad ; ; \quad k^2 - k - 2k + 2 = 2 \quad ; ; \quad k^2 - 3k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 3 \end{cases} \\ \frac{k-2}{2} = \frac{2k+1}{-1} \quad ; ; \quad -k + 2 = 4k + 2 \quad ; ; \quad 0 = 5k \quad ; ; \quad \underline{k = 0} \end{cases}$$

Para $k = 0$ resultan los planos $\pi_1 \equiv -2x + y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv 2x - y - z = 0$, que no son coincidentes, por lo tanto:

Los planos son paralelos para $k = 0$

Los planos son perpendiculares cuando lo son sus vectores normales. Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow (k-2, 1, 2k+1) \cdot (2, k-1, -1) = 0 \quad ; ; \quad 2k - 4 + k - 1 - 2k - 1 = 0 \quad ; ;$$

$$k - 6 = 0 \quad ; ; \quad \underline{k = 6}$$

Para $k = 6$ los planos son perpendiculares.

Los planos son secantes $\forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

Para $k = -1$ los planos son $\pi_1 \equiv -3x + y - z = 1$ y $\pi_2 \equiv 2x - 2y - z = 0$ y la expresión de la recta por don ecuaciones implícitas es: $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$

La expresión continua de r es como sigue:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -y + z = 1 - 3\lambda \\ -2y - z = -2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow -3y = 1 - 5\lambda \quad ; ; \quad \underline{y = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\lambda}$$

$$-y + z = 1 - 3\lambda \quad ; ; \quad \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\lambda + z = 1 - 3\lambda \quad ; ; \quad \underline{z = 1 - 3\lambda - \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\lambda = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\lambda = z}$$

Un vector director de r puede ser $\vec{v} = (3, 5, -4)$ y un punto es $P\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

La ecuación continua de r es: $\frac{x-0}{3} = \frac{y+\frac{1}{3}}{5} = \frac{z-\frac{2}{3}}{-4}$. Operando y simplificando:

$$\frac{x}{3} = \frac{\frac{3y+1}{3}}{5} = \frac{\frac{3z-2}{3}}{-4} \quad ;; \quad \frac{x}{3} = \frac{3y+1}{15} = \frac{3z-2}{-12}$$

$$\underline{\underline{r \equiv x = \frac{3y+1}{5} = \frac{3z-2}{-4}}}$$

3º) Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$. Se pide:

a) Hallar los extremos relativos de la función $f(x)$.

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Hacer una gráfica de la función.

a)

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot e^x (2-x)}{e^{2x}} = \frac{x(2-x)}{e^x} = f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{(2-2x) \cdot e^x - x(2-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2-2x-2x+x^2}{e^x} = \frac{x^2-4x+2}{e^x} = f''(x)$$

$$f''(0) = \frac{2}{e^0} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mín(0, 0)}}$$

$$f''(2) = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 2}{e^2} = \frac{-2}{e^2} < 0 \Rightarrow f(2) = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2} \cong 0'54 \Rightarrow \underline{\underline{Máx(2, 0'54)}}$$

Para que exista P. I. es condición necesaria que $f''(x) = 0$, pero no es suficiente; para que exista P. I. es necesario que $f'''(x) \neq 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \ ; \ ;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{2} \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'''(x) = \frac{(2x-4) \cdot e^x - (x^2-4x+2) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2x-4-x^2+4x-2}{e^x} = \frac{-x^2+6x-6}{e^x} = f'''(x)$$

$$f'''(2+\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow P. I. \Rightarrow f(2+\sqrt{2}) = \frac{(2+\sqrt{2})^2}{e^{2+\sqrt{2}}} \cong 0'38 \Rightarrow \underline{\underline{P. I(3'41, 0'38)}}$$

$$f'''(2+\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow P. I. \Rightarrow f(2+\sqrt{2}) = \frac{(2+\sqrt{2})^2}{e^{2+\sqrt{2}}} \cong 0'38 \Rightarrow \underline{\underline{P. I. (3'41, 0'38)}}$$

$$f'''(2-\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow P. I. \Rightarrow f(2-\sqrt{2}) = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{e^{2-\sqrt{2}}} \cong 0'24 \Rightarrow \underline{\underline{P. I. (0'59, 0'24)}}$$

b)

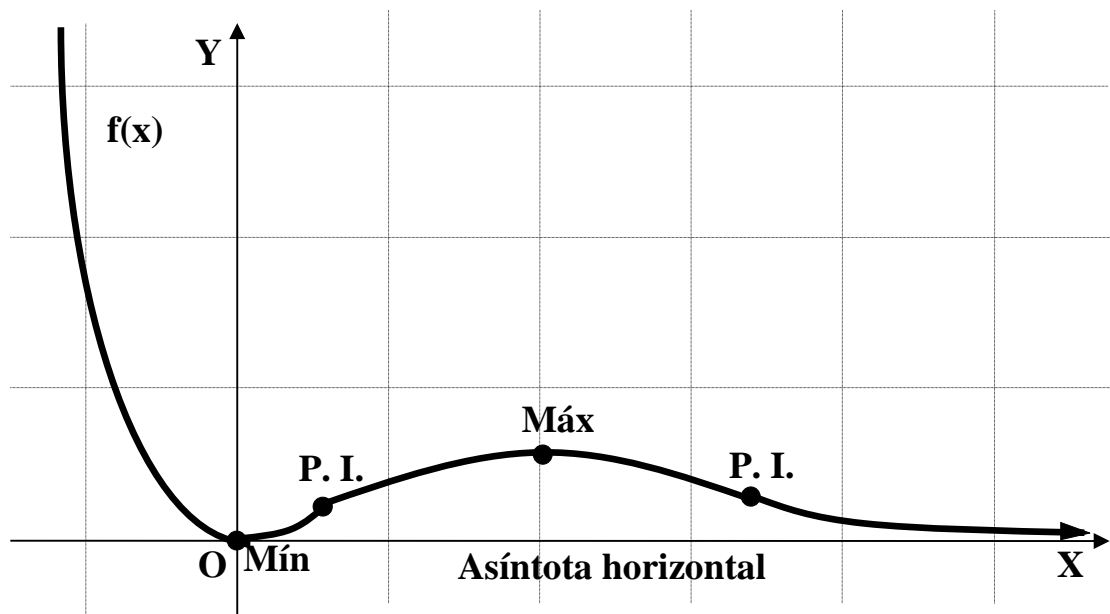
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L' Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In det. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L' Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

c)

La representación gráfica es, aproximadamente, la que sigue:



4º) Hacer un dibujo de la región limitada por la curva $y = \text{sen } x \cdot \cos x$ y las rectas $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$ e $y = 0$. Calcular su área.

Sabiendo que $\text{sen}(2\alpha) = 2 \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$, la función puede expresarse de la forma $y = \frac{1}{2} \text{sen}(2x)$, lo cual la hace más fácil para su estudio.

Los puntos de corte con el eje de abscisas son:

$$y = \frac{1}{2} \text{sen}(2x) = 0 \Rightarrow \text{sen}(2x) = 0 \;; \; 2x = 0 + k\pi \;; \; x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)}, \forall k \in Z$$

La función está acotada superior e inferiormente siendo $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Los máximos y mínimos (en este caso absolutos por estar la función acotada) son los siguientes:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos(2x) = \cos(2x) = y'$$

$$y' = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0 \;; \; 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2}(1 + 2k) \;; \; x = \frac{\pi}{4}(1 + 2k), \forall k \in Z$$

$$y'' = -2 \text{sen}(2x)$$

$$\text{Para } k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow 2x \Rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \dots \;; \; x \Rightarrow \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \pi, \dots$$

$$k \text{ impar} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{2}, \dots \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \dots \right) \Rightarrow (\text{Periodo } \pi)$$

$$k \text{ par} \Rightarrow \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \frac{\pi}{4} + 3\pi, \dots \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots \right) \Rightarrow (\text{Periodo } \pi)$$

$$y''_{(k=1, 3, 5, \dots)} \Rightarrow -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right), -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right), -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 5\pi\right), \dots \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimos}}$$

$$y''_{(k=0, 2, 4, \dots)} \Rightarrow -\text{sen}\frac{\pi}{2}, -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right), -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right), \dots \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximos}}$$

$$\underline{\underline{\text{Mínimos : } A\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right); B\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{1}{2}\right); C\left(\frac{11\pi}{4}, \frac{1}{2}\right); \dots}}$$

$$\text{Máximos : } P\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right); Q\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right); R\left(\frac{9\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right); \dots$$

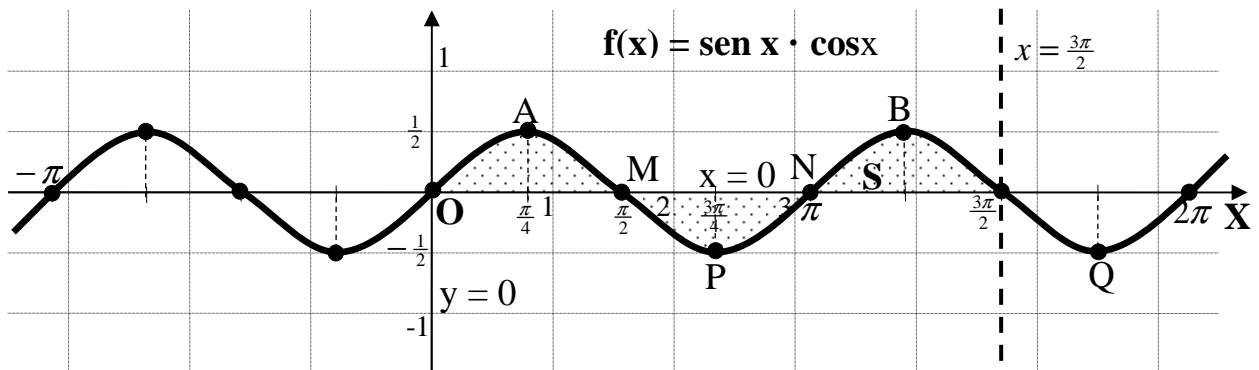
Los puntos de inflexión son para aquellos valores de x que anulan la segunda derivada.

$$y'' = -2 \operatorname{sen}(2x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(2x) = 0 \;; \; 2x = 0, \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$$

$$f(0) = 0 \;; \; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \;; \; f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \dots$$

$$\text{Puntos de Inflexión : } O(0, 0); M\left(\frac{\pi}{2}, 0\right); N(\pi, 0); \dots$$

La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente:



El área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + [F(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + [F(x)]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) + F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F(\pi) = \underline{2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F(0) - 2F(\pi)} = S$$

$$F(x) = \int \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \cdot dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \operatorname{sen} t \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int \operatorname{sen} t \cdot dt = -\frac{1}{4} \cos t = -\frac{1}{4} \cos(2x) = \underline{F(x)}$$

Sustituyendo el valor obtenido de F(x) en la expresión de la superficie:

$$S = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4} \cos \pi\right) + \left[-\frac{1}{4} \cos(3\pi)\right] - \left(-\frac{1}{4} \cos 0\right) - 2 \left[-\frac{1}{4} \cos(2\pi)\right] =$$

$$S = -\frac{1}{2} \cos \pi - \frac{1}{4} \cos (3\pi) - \frac{1}{4} \cos 0 + \frac{1}{2} \cos (2\pi) = -\frac{1}{2} \cdot (-1) - \frac{1}{4} \cdot (-1) - \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{1}} \quad u^2 = S$$
